6 Modello di Crescita Neoclassico

Nel modello di Solow, il tasso di risparmio ('s') è esogeno, costante e ad hoc. Gli agenti risparmiano sempre una quota fissa del reddito. Nella realtà, le famiglie e le imprese scelgono 's'. Il modello di crescita neoclassico microfonda la scelta fra consumo e investimento. Cambia nei fatti la sola funzione di investimento.

Per microfondare la scelta di consumo delle famiglie partiamo dalla seguente funzione di utilità:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t logC_t$$

e assumiamo che le famiglie offrano lavoro in maniera non elastica, $N_t = 1$. D'altra parte le imprese producono utilizzando la Cobb Douglas solita:

$$Y_t = f(K_t, A_t L_t) = A_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} = C_t + I_t$$

mentre la legge di moto del capitale è:

$$K_{t+1} = K_t(1-\delta) + I_t.$$

Le imprese pagano w_t ai lavoratori e r_t come ritorno del capitale.

6.1 Social Planner vs. Equilibrio Competitivo

immaginiamo ci sia un Social Planner che voglia massimizzare l'utilità delle famiglia sotto il vincolo di accumulazione di capitale. Il suo problema è quindi:

$$\max_{K_{t+1}} \quad U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t logC_t$$
$$\text{s.t.} \quad K_{t+1} = K_t(1-\delta) + A_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} - C_t.$$

La lagrangiana relativa è:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ logC_t + \lambda_t \left[K_t(1-\delta) + A_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} - C_t - K_{t+1} \right] \right\}$$

Il social planner sceglie, dati w_t e r_t. Ottimizziamo rispetto a C_t, K_{t+1} e a λ_t. Considerando i seguenti due vincoli:

$$K_0 = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \lambda_t K_{t+1} = 0$$

Le derivate sono le seguenti:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} : \quad C_t^{-1} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} : \quad \lambda_t = \beta(1-\delta)\lambda_{t+1} + \beta\lambda_{t+1} A_{t+1}^{\alpha} K_{t+1}^{-\alpha} L_{t+1}^{\alpha}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} : \quad K_{t+1} = \left[K_t(1-\delta) + A_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} - C_t\right]$$

Nella realtà però non esiste il social planner, c'è il mercato quindi dobbiamo chiederci se un equilibrio competitivo è socialmente ottimo. In particolare, ci chiediamo quale è l'insieme di prezzi (w_t e r_t) e quantità (K, C, L) tali per cui (i) tutti gli agenti massimizzano utilità o profitti e (ii) tutti i mercati sono in equilibrio.

Partiamo dal problema delle famiglie. Queste accumulano titoli e guadagnano interessi su questi titoli, ricevono stipendi per il lavoro che erogano e decisono quanto consumare in maniera ottimale. Il loro problema di ottimo è quindi:

$$\max_{K_{t+1}} \quad U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t logC_t$$
$$\text{s.t.} \quad B_{t+1} = B_t(1+R_t) + w_t L_t - C_t.$$

Dove B individua i titoli (Bond), R il loro rendimento e ricordandosi che $L_t = 1$.

La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{logC_t + \lambda_t \left[B_t(1+R_t) + w_t L_t - C_t - B_{t+1}\right]\right\}$$

Considerando i seguenti due vincoli:

$$A_0 = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \lambda_t A_{t+1} = 0$$

le relative derivate sono:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t}: \quad C_t^{-1} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{t+1}}: \quad \lambda_t = \beta[\lambda_{t+1}(1 + R_{t+1})]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t}: \quad B_{t+1} = B_t(1 + R_t) + w_t L_t - C_t$$

D'altra parte le imprese massimizzano i loro profitti.

$$\max \quad \pi = A_t^\alpha K_t^{1-\alpha} L_t^\alpha - r_t K_t - w_t L_t$$

le cui derivate, bene note, ci dicono che le produttività marginali sono uguali ai prezzi. Infatti

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t}: \quad (1-\alpha) A_t^\alpha K_t^{-\alpha} L_t^\alpha = r_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t}: \quad \alpha A_t^\alpha K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha-1} = w_t$$

Dati i due problemi di massimizzazione, adesso dobbiamo considerare l'equilibrio sui mercati (dei fattori e dei beni). I mercati dei fattori produttivi sono in equilibrio se: $B_{t+1} = K_{t+1}$ e $L_t = 1$. Mentre il mercato dei beni è in equilibrio se:

$$C_t + I_t = A_t^\alpha K_t^{1-\alpha} L_t^\alpha = A_t^\alpha K_t^{1-\alpha}$$

..infine il rendimento che le famiglie ottengono dai titoli, deve essere uguale a

$$R_t = r_t - \delta.$$

Adesso possiamo confrontare le condizioni del prim'ordine del Social Planner con quelle ottenute se il mercato è competitivo. Notiamo subito che la condizione che riguarda il consumo è uguale. Anche la condizione che riguarda il capitale è uguale a quella che riguarda i titoli. Infatti

$$\begin{aligned}\lambda_t =&\beta(1-\delta)\lambda_{t+1} + \beta\lambda_{t+1}A^{\alpha}_{t+1}K^{-\alpha}_{t+1}L^{\alpha}_{t+1}\\ =&\beta(1-\delta)\lambda_{t+1} + \beta\lambda_{t+1}r_{t+1}\\ =&\beta[\lambda_{t+1}(1-\delta+r_{t+1})]\\ =&\beta[\lambda_{t+1}(1+R_{t+1})].\end{aligned}$$

Possiamo quindi affermare che *'l'equilibrio competitivo'* è socialmente ottimo.

6.2 Stazionarietà

- K_t, C_t, w_t evolvono nel tempo in maniera costante, dato il progresso tecnologico A_t;
- L_t è costante;
- analizziamo la stazionarietà guardando 'all'unità di efficienza'. Dividiamo quindi le nostre variabili per A_t: $\tilde{K_t} = K_t/A_t$;$\tilde{C_t} = C_t/A_t$;$\tilde{w_t} = w_t/A_t$

Le equazioni rilevanti del sistema sono:

$$\tilde{r_t} = (1-\alpha)\tilde{K_t}^{-\alpha}L^{\alpha}_t = (1-\alpha)\tilde{K_t}^{-\alpha}$$

$$\tilde{w_t} = \alpha\tilde{K_t}^{1-\alpha}L^{\alpha-1}_t = \alpha\tilde{K_t}^{1-\alpha}$$

Inoltre, considerando le condizioni del prim'ordine rispetto al consumo, possiamo scrivere:

$$C^{-1}_t = \beta[C^{-1}_{t+1}(1-\delta+r_{t+1})]$$

che è l'equazione di Eulero:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1-\delta+r_{t+1}) = \beta(1+R_{t+1})$$

e mostra il trade-pff fra consumo presente e consumo presente. Il consumo crescerà nel tempo quando il tasso di sconto è inferiore al rendimento dei titoli.

In termini di unità di efficienza va riscritta come:

$$\tilde{C_t}^{-1} = \beta[\tilde{C}_{t+1}(1+g^A)]^{-1}(1-\delta+(1-\alpha)\tilde{K_t}^{-\alpha})$$

Dato che in stato stazionario $\tilde{K}_{t+1} = \tilde{K}_t = \tilde{K} \quad$ e $\quad \tilde{C}_{t+1} = \tilde{C}_t = \tilde{C}$, la nostra equazione di eulero ci dice che:

$$(1 + g^A) = \beta(1 - \delta + r) = \beta(1 - \delta + (1 - \alpha)\tilde{K}^{-\alpha})$$

e quindi il capitale (per unità di efficienza) di equilibrio è:

$$\tilde{K} = \left(\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+g^A) - \beta(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

confrontandola con il risultato del modello di Solow, ci rendiamo conto che ora il sentiero di crescita bilanciata è funzione dei parametri della microfondazione. Inoltre, ci rendiamo conto che il risparmio è endogeno. Infatti:

$$s_t = \frac{Y_t - C_t}{Y_t} = \frac{K_{t+1} - (1-\delta)K_t}{Y_t} = \frac{K_{t+1} - (1-\delta)K_t}{A_t^{\alpha} K_t^{1-\alpha}}$$

dividendo per A_t (per riportare tutto in unità di efficienza), otteniamo:

$$\begin{aligned} s_t =& \frac{(1+g^A)\tilde{K}_t - (1-\delta)\tilde{K}_t}{\tilde{K}_t^{1-\alpha}} \\ =& [(1+g^A) - (1-\delta)]\tilde{K}_t^{\alpha} \\ =& \frac{g^A + \delta}{(1+g^A) - \beta(1-\delta)} \beta(1-\alpha) \end{aligned}$$

e la Golden Rule?

$$\tilde{C}_t = \tilde{K}_t^{1-\alpha} - \frac{K_{t+1}}{A_t} + (1-\delta)\tilde{K}_t$$

che in stato stazionario divente

$$\tilde{C} = \tilde{K}^{1-\alpha} - (g^A + \delta)\tilde{K}$$

la cui derivata è

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{K}} : \quad (1-\alpha)\tilde{K}^{-\alpha} = (g^A + \delta)$$

quindi il capitale che massimizza il consumo è:

$$\tilde{K}^{GR} = \left(\frac{1-\alpha}{g^A+\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Se sostiuiamo questo risultato nell'espressione che rappresenta il tasso di risparmio in equilibrio notiamo otteniamo il valore di risparmio di Golden Rule:

$$s^{GR} = [(1+g^A)-(1-\delta)](\tilde{K}_t^{GR})^{\alpha} = 1-\alpha$$

E notiamo che il tasso di risparmio in stato stazionario è diverso da quallo di Golden Rule. In particolare sono uguale se e solo se $\beta = 1$.