Modello di Solow (solo le equazioni principali)

Elementi principali:

- È un modello semplice che permette di analizzare cause e meccanismi della crescita
- il motore della crescita è l'accumulazione di capitale
- si basa tutto sulla funzione di produzione neoclassica
- limite: il tasso di risparmio, s, è esogeno/fisso/dato

Ipotesi:

- unico bene (Y) viene prodotto utilizzando capitale (K), lavoro L e impiegando tecnologia (A)
- il paese è chiuso agli scambi con l'estero e non c'è settore pubblico
- il prodotto (Y) può essere consumato o investito per produrre nuovo capitale
- in equilibrio sappiamo quindi che $S = I$
- tatto di risparmio,s, è esogeno

Dalle ipotesi abbiamo quindi che:

$$I_t = Y_t - C_t = sY_t$$

Le imprese accumulano capitale per avere **nuovo** capitale o per **rimpiazzare** capitale esistente. La legge di moto del capitale è:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= K_t(1-\delta) + I_t \\ K_{t+1} &= K_t(1-\delta) + sY_t \\ K_{t+1} - K_t &= sY_t - \delta K_t \end{aligned}$$

Abbiamo una funzione di produzione neoclassica con rendimenti di scala costanti ed è omogenea di grado 1:

$$F(\mu K, \mu L) = \mu F(K, L)$$

I prodotti marginali sono positivi ma decrescenti per ciascun input. Valgono le condizioni di Inada:

$$\lim_{K\to 0} F_k = \lim_{L\to 0} F_L = \infty$$

$$\lim_{K\to \infty} F_k = \lim_{L\to \infty} F_L = 0$$

ed entrambi i fatto produttivi sono essenziali per la produzione:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

Esempio di funzione è la Cobb-Douglas: $F(K, L) = K^{1-\alpha}L^{\alpha}$.

Stato stazionario ($K_{t+1} = K_t = K^*$) in assenza di tecnologia lo troviamo usando la legge di moto del capitale, $K_{t+1} = K_t(1-\delta) + sF(K_t, L_t)$:

$$\begin{cases} K = 0 \\ K = \frac{sF(K,L)}{\delta} \end{cases}$$

Lo stato stazionario con capitale nullo non è rilevante (implicherebbe niente produzione). L'altro stato stazionario implica che il rapporto capitale/prodotto è costante nel tempo.

Nel caso di una funzione Cobb-Douglas, con $L_t = L = 1$:

$$K = \frac{sF(K, L)}{\delta} = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Introduciamo il progresso tecnologico, A:

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t),$$

assumiamo che l'offerta di lavoro, L, è costante e il progresso tecnico è alla Harrod

$$Y_t = F(K_t, A_t L).$$

inoltre

$$A_t = (1 + g^A)A_{t-1} = (1 + g^A)^t A_0$$

Definiamo $k = \frac{K_t}{A_t}$ e dividiamo la legge di moto del capitale per K_t:

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = g^K = sf(1, \frac{L}{k}) - \delta$$

affinché la crescita sia costante, *k* deve rimanere costante, quindi il tasso di crescita dell'economia deve essere uguale al tasso di crescita dello stock di capitale:

$$\begin{aligned}
k_{t+1} - k_t &= 0 \\
\frac{K_{t+1}}{K_t} - \frac{A_{t+1}}{A_t} &= 0 \\
\frac{(1+g^K)K_t}{K_t} - \frac{(1+g^A)A_t}{A_t} &= 0 \\
g^K &= g^A
\end{aligned}$$

Con tecnologia, il capitale di stato stazionario, in generale e per la Cobb-Douglas, è uguale a:

$$K = \frac{sF(K, L)}{g^A + \delta} = \left(\frac{s}{g^A + \delta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Mostrate che:

$$g^K = g^A = g^Y = g^I = g^C.$$

Possiamo a questo punto calcolare il livello ottimale del capitale (K^{GR}, capitale di golden rule) che massimizza il consumo. Il consumo è uguale a:

$$\begin{aligned}
C_t = Y_t - I_t &= (1 - s)Y_t \\
&= (1 - s)F(K_t, A_t N) \\
c_t &= (1 - s)f(k_t, N)
\end{aligned} \tag{44}$$

sostituendo il valore in equilibrio del risparmio, e usando la Cobb-Douglas, possiamo riscrivere la funzione in termini di *k*:

$$\begin{aligned}
c^* &= (1 - s^*)f(k_t, N) \\
&= f(k_t, N) - (g^A + \delta)k \\
&= k^{1-\alpha} - (g^A + \delta)k
\end{aligned} \tag{45}$$

Massimizzando questa funzione (calcolando la derivata rispetto a k e ponendola uguale a zero), otteniamo il valore di k^{GR}:

$$k^{GR} = \left(\frac{1 - \alpha}{g^A + \delta} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$