# Investimento

La funzione di investimento keynesiana è molto semplificata e presenta gli stessi problemi della funzione del consumo: non è microfondata e non è compatibile con l'evidenza empirica. Questa funzione non riesce, infatti, a spiegare la forte variabilità della serie degli investimenti.

D'altra parte anche la legge di moto del capitale del modello neoclassico non riesce a spiegare bene le fluttuazioni degli investimenti. Infatti il tasso di interesse muove lo stock di capitale e l'aggiustamento è troppo rapido.

Vengono quindi presentati due modelli: il modello della $Q$ di Tobin e il modello degli investimenti Lumpy.

### Modello Q di Tobin

La $Q$ viene definita come il rapporto fra il valore di mercato di un'impresa e il costro di sostituzione del suo stock di capitale. Se il rapporto è maggiore (minore) di 1, all'impresa conviene accumulare (decumulare) capitale. Il ragionamento sottostante è semplice. Se il valore di mercato è più alto (basso) del costo di sostituzione, vuol dire che il capitale ha un valore più alto (basso) all'interno dell'impresa che fuori.

Prima di analizzare il modello, definiamo i costi di aggiustamento dello stock di capitale:

- Costi di aggiustamento: costi di si pagano per cambiare lo stock di capitale;
- costi di aggiustamento interni: costi che le imprese pagano direttamente (costi di installazione, riorganizzazione del sistema produttivo e aggiornamento/formazione del personale);
- costi di aggiustamento esterni: costi che cambiano il prezzo del capitale e quindi i prezzi relativi.

Noi ci occuperemo solo dei costi interni. In particolare, i nostri costi saranno (convessi) del tipo:

$$CC_t = \frac{\mu}{2}\frac{I_t^2}{K_t}$$

Le imprese, in particolare, massimizzano la somma dei profitti reali futuri, data la legge di moto del capitale.

$$\max_{K_{t+1},L_t} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^k} \left\{ A_{t+k} F(K_{t+k}, L_{t+k}) - \omega_{t+k} L_{t+k} - I_t - \frac{\mu}{2} \frac{I_t^2}{K_t} \right\}$$

s.t.

$$K_{t+1} = K_t + I_t$$

La lagrangiana relativa è:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^k} \left\{ A_{t+k} F(K_{t+k}, L_{t+k}) - \omega_{t+k} L_{t+k} - I_t - \frac{\mu}{2} \frac{I_t^2}{K_t} + \lambda_t \left[ K_t + I_t - K_{t+1} \right] \right\}$$

Deriviamo rispetto a capitale, investimento e lavoro:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} : A_t F_L(K_t, L_t) = \omega_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} : 1 + \mu \frac{I_t}{K_t} = \lambda_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} : \frac{1}{(1+r)} \left\{ A_{t+1} F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) + \frac{\mu}{2} \frac{I_{t+1}^2}{K_{t+1}^2} + \lambda_{t+1} \right\} = \lambda_t$$

Dalla prima condizione, si ottiene che il salaro reale è uguale alla produttività marginale del lavoro. Dalla seconda condizione otteniamo che:

$$I_t = (\lambda_t - 1) \frac{K_t}{\mu}.$$

quindi, gli investimenti possono essere positivi solo se $\lambda_t > 1$.

Si ricorda che $\lambda$ è il prezzo ombra di una unità di capitale. Supponendo che l'impresa scelga ottimamente $K_{t+1}$, rilassando il vincolo...una unità aggiuntiva di capitale installato ha valore $\lambda$.

A questo punto, prendiamo la terza condizione e riscriviamola:

$$\lambda_t = \frac{1}{(1+r)} \left\{ A_{t+1} F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) + \frac{\mu}{2} \frac{I_{t+1}^2}{K_{t+1}^2} + \lambda_{t+1} \right\} \tag{27}$$

Questa relazione ci dice che il valore ombra del capitale oggi dipende dal ritorno marginale del capitale domani, dai costi di aggiustamento risparmiati al periodo successivo (comprando una unità oggi, si riducono i costi di domani); dal valore ombra di domani, dato che $K$ può essere venduto. Prendiamo l'equazione (27) e iteriamola in avanti, sostituento $\lambda_{t+1}$:

$$\lambda_t = \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^k} \left\{ A_{t+k} F_K(K_{t+k}, L_{t+k}) + \frac{\mu}{2} \frac{I_{t+k}^2}{K_{t+k}^2} + \frac{\lambda_{t+T}}{(1+r)^T} \right\} \tag{28}$$

L'ultimo addendo è uguale a zero (condizione di trasversalità) per $T$ che tende a infinito. Quindi:

$$\lambda_t = \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^k} \left\{ A_{t+k} F_K(K_{t+k}, L_{t+k}) + \frac{\mu}{2} \frac{I_{t+k}^2}{K_{t+k}^2} \right\} \tag{29}$$

Il prezzo ombra del capitale oggi è uguale al valore ottimale della somma dei futuri prodotti maginali del capitale e dei costi di aggiustamento risparmiati, grazie all'unità di capitale in più acquistata oggi. Inoltre, l'equazione (29) ci dice che l'aumento del tasso di interesse, riducendo il prezzo ombra, porta ad una riduzione dell'investimento.

Tuttavia, $\lambda$ non è osservabile. Proviamo a lavorare sull'equazione (27). Moltiplichiamo a sinistra e destra per $K_{t+1}$ e ricordiamoci che $K_{t+2} = K_{t+1} + I_{t+1}$, ottenendo:

$$\lambda_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left\{ A_{t+1} F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) K_{t+1} + \frac{\mu}{2} \frac{I_{t+1}^2}{K_{t+1}} + \lambda_{t+1}(K_{t+2} - I_{t+1}) \right\} \tag{30}$$

Ricordandoci che $\lambda_{t+1} = 1 + \mu(I_{t+1}/K_{t+1})$, possiamo riscrivere l'equazione (30) come:

$$\lambda_t K_{t+1} = \frac{1}{(1+r)} \left\{ A_{t+1} F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) K_{t+1} - \frac{\mu}{2} \frac{I_{t+1}^2}{K_{t+1}} - I_{t+1} + \lambda_{t+1} K_{t+2} \right\} \tag{31}$$

Iteriamo in avanti l'equazione (31) e, usando la condizione di trasversalità, otteniamo:

$$\lambda_t K_{t+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^k} \left\{ A_{t+k} F_K(K_{t+k}, L_{t+k}) K_{t+k} - \frac{\mu}{2} \frac{I_{t+k}^2}{K_{t+k}} - I_{t+k} \right\} \tag{32}$$

Infine, sapendo che:

$$A_{t+k}F_K(K_{t+k}, L_{t+k})K_{t+k} = A_{t+k}F(K_{t+k}, L_{t+k}) - \omega_{t+k}L_{t+k}$$

possiamo riscrivere l'equazione (33) come:

$$\lambda_t K_{t+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^k} \left\{ A_{t+k}F(K_{t+k}, L_{t+k}) - \omega_{t+k}L_{t+k} - \frac{\mu}{2}\frac{I_{t+k}^2}{K_{t+k}} - I_{t+k} \right\} = V_t \tag{33}$$

quindi

$$\lambda_t = \frac{V_t}{K_{t+1}}$$

che è uguale alla $Q$ di Tobin se il prezzo del capitale è normalizzato e pari a $1$.

**Lumpy Investments - Investimenti a Intervalli**

Il modello della $Q$ di Tobin risolve il problema della microfondazione e ci aiuta a spiegare l'andamento dell'investimento aggregato. Tuttavia se si guardano i dati micro la storia è un po' più complicata:

- gran parte degli stabilimenti industriali, in un determinato anno, cambia solo una piccola frazione (meno del 10%) dello stock di capitale;
- un quarto della spesa in investimenti è fatto da imprese che cambiano lo stock reale di più del 30%;
- le imprese cambiano lo stock di capitale in un arco temporale lungo e lo concentrano in un piccolo periodo.
- ci sono periodi di forti fluttuazioni.

A livello micro, il modello che sembra spiegare questi andamenti è quello detto dei Lumpy Investments. Le imprese effettuano investimenti a intervalli perché confrontano il beneficio dato dall'acquisto del nuovo macchinario con il costo (fisso) da pagare. Le ipotesi generali sono le seguenti:

- $Y_t = A_t F(K_t)$
- $P_I/P = 1$

- $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$
- $F > 0$ se $I \neq 0$ è il costo di aggiustamento fisso.

Date le assunzioni, i profitti (dividendi) sono uguali a:

$$d_t = \begin{cases} A_t F(K_t) - (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) - F \quad if \quad I_t \neg 0 \\ A_t F(K_t) \quad if \quad I_t = 0 \end{cases}$$

Le imprese devono massimizzare la funzione del valore delle stesse, data da:

$$V(A_t, K_t) = max[\max_{K_{t+1}} A_t F(K_t) - (K_{t+1} - (1-\delta)K_t) - F + \frac{1}{1+r} E_t[V(A_{t+1}, K_{t+1})];$$
$$A_t F(K_t) + \frac{1}{1+r} E_t[V(A_{t+1}, (1-\delta)K_t)]]$$

L'impresa decide di investire (aggiustare lo stock di capitale) guardando al valore di capitale desiderato, $K^*$. In particolare investirà se:

$$A_t F(K_t) - (K^* - (1-\delta)K_t) - F + \frac{1}{1+r} E_t[V(A_{t+1}, K^*)]$$
$$>$$
$$A_t F(K_t) + \frac{1}{1+r} E_t[V(A_{t+1}, (1-\delta)K_t)]$$

cioè se:

$$\frac{1}{1+r}[E_t[V(A_{t+1}, K^*)] - E_t[V(A_{t+1}, (1-\delta)K_t)]]$$
$$>$$
$$K^* - (1-\delta)K_t - F.$$

L'impresa deciderà d investire solo quando la *distanza* del capitale attuale da quello desiderato è sufficientemente grande da giustificare la spesa.

Se $K^* - (1-\delta)K_t$ è piccolo, il beneficio sarà vicino allo zero mentre il costo sarà vicino ad $F$. Si può cstruire una funzione di rischio dell'Investimento che dipenda dai costi fissi, dalla distanza fra capitale effettivo e desiderato e della produttività.